سوالات تمرین 2 جبر – بخش 2.8 2.9 :

1. بررسی کنید کدام یک از زیرمجموعه های زیر یک زیرفضا (subspace) از R^3 هستند.

الف) {(x, y, z) | 2x + y - 3z = 7}

ب) {(-5x , 3x , 2x ) | x ∈ R}

ج) {( x - 2 , x , x – 5) | x ∈ R}

د) {( x , y , z ) | 2x + 9y = 0 , 8x – 5z = 0}

پاسخ :

الف) زیر فضا نیست چون 0 جز جواب تساوی 2x + y – 3z = 7 نیست.

ب) تحت ضرب و جمع بسته است و 0 نیز جز جواب های ان است => زیر فضا هست.

ج) بردار صفر را شامل نمیشود در نتیجه زیرفضا نیست.

د) زیر فضا هست. طبق تساوی ها داریم : A = بطوریکه Ax = 0

با حل تساوی بالا داریمz x = به ازای هر ∈ R z در نتیجه این مجموعه} span { است و از انجایی که هر span ای زیر فضاست، این زیر مجموعه یک زیرفضا برای R^3 است.

1. با توجه به ماتریس زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

A =

الف) یک پایه برای column space این ماتریس بیابید.

ب) یک پایه برای nullspace این ماتریس بیابید.

ج) اگر p = نشان دهید p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) آیا q = در nullspace ماتریس A قرار دارد ؟ توضیح دهید.

پاسخ:

الف) فرم کاهش یافته A را بدست میاوریم :

A = با توجه به اینکه در ستون های یک و دو pivot position داریم. ستون های یک و دو ماتریس اولیه پایه های فضای ستونی را تشکیل میدهند. {c1 = (1, 3, 2) , c2 = (2, 0, -2)}

ب) Ax = 0 با حل این تساوی داریم :

فرم کاهش یافته:

A =

X1 + 1/3 x3 + 5/3 x4 = 0

X2 + 4/3 x3 -1/3 x3 = 0

X = = = x4

در نتیجه :

Null A = {(-1/3, -4/3, 1, 0), (-5/3, 1/3, 0, 1)}

ج)

[A p ] ~

معادله ی Ax = p جواب دارد در نتیجه p در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد.

د) خیر چون q ∈ R ^4 نیست.

1. فرض کنید A یک ماتریس 7 x 5 میباشد. اگر داشته باشیم range A∈ ، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) dim (nul(A)) را بدست آورید.

ب ) rank ( را بدست اورید.

پاسخ :range همان فضای ستونی ماتریس است در نتیجه rank(A) = 2

الف) dim(nul(A)) = n – rank(A) = 5 – 2 = 3: rank theorem

ب) ترانهاده جای ستون ها و ردیف هارا عوض میکند در نتیجه :

اگرB = :

Rank( = rank (B) = dim (colB ) = dim (row(A))

از طرفی طبق rank theorem rank: dim(col(A)) = dim(row(A)) = rank(A)

در نتیجه Rank( = dim(row(A)) = rank(A) = 2

1. پایه B و بردار x را مطابق زیر در نظر بگیرید.

مختصات نقطه ای x نسبت به پایه B را بدست اورید.

B = { } , x =

پاسخ :

X = c1b1 + c2b2 + c3b3 انگاه =

در نتیجه c1 = 1/2 c2 = 2 c3 = -1